阅读材料：概率数论 (1)

宗语轩

2023 年 4 月 6 日

记 $\Omega_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, $v(x)$ 表示整除 x 的素数总数, 即

$$v(x) = \#\left\{p : p\text{为素数}, \ p|x\right\}.$$

我们旨在证明如下问题:

定理 0.1. 设 $w(n) \to +\infty$, 则

$$\#\left\{x \in \Omega_n : |v(x) - \ln\ln n| > w(n)\sqrt{\ln\ln n}\right\} = o(n).$$

注. 该定理最初由 Hardy 和 Ramanujan 两人于 1920 年首先给出证明. 而在 1934 年, Turán 另给出了一个概率方法的证明, 见下:

证明. 引入 $\mathbb{P}_n$ 为 Ω_n 上均匀概率测度, 在 $\mathbb{P}_n$ 下从 Ω_n 中选取 x, 原定理即证明

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(x \in \Omega_n : |v(x) - \ln\ln n| > w(n)\sqrt{\ln\ln n}) = 0.$$

定义

$$X_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{若} \ \ p|x, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

取 $M = n^{\frac{1}{10}}$, 令 $X = \sum\limits_{p\le M} X_p$. 我们有

引理 0.1. 对 $\forall x \in \Omega_n$, 均有

$$v(x) - 10 \le X(x) \le v(x).$$

提示 对 x 进行素数分解即可.

回到原题. 利用

$$\mathbb{E}[X_p] = \frac{[n/p]}{n} = \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

及参考资料 [1] 中的

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + O(1),$$

[0]个人主页: http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/.

发现错误欢迎联系: zyx240014@mail.ustc.edu.cn.

由期望的线性性得

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{p \le M} \left(\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \ln\ln n + O(1).$$

类似, 利用

$$\mathrm{Var}(X_p) = \mathbb{E}[X_p^2] - (\mathbb{E}[X_p])^2 = \mathbb{E}[X_p] - (\mathbb{E}[X_p])^2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

可知

$$\sum_{p \le M} \mathrm{Var}(X_p) = \sum_{p \le M} \frac{1}{p} + O(1) = \ln\ln n + O(1).$$

引理 0.2. 证明:

$$\sum_{1 \le p \ne q \le M} \mathrm{Cov}(X_p, X_q) = o(1).$$

引理的证明: 注意到: 对固定的 $x \in \Omega_n$, "$X_p X_q = 1$" 当且仅当 "$p|x$ 且 $q|x$", 即 "$pq|x$". 故

$$\mathrm{Cov}(X_p, X_q) = \mathbb{E}[X_p X_q] - \mathbb{E}[X_p]\mathbb{E}[X_q] = \frac{[n/pq]}{n} - \frac{[n/p]}{n}\frac{[n/q]}{n}.$$

一方面,

$$\mathrm{Cov}(X_p, X_q) \leqslant \frac{1}{pq} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right),$$

因此

$$\sum_{p \ne q \le M} \mathrm{Cov}(X_p, X_q) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{p \ne q \le M} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \le \frac{2M}{n} \sum_{p \le M} \frac{1}{p} \le O(n^{-9/10} \ln\ln n) = o(1).$$

另一方面,

$$\mathrm{Cov}(X_p, X_q) \geqslant \frac{1}{pq} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = -\frac{1}{n},$$

因此

$$\sum_{p \ne q \le M} \mathrm{Cov}(X_p, X_q) \geqslant -\frac{M^2}{n} \ge -O(n^{-4/5} \ln\ln n) = -o(1).$$

回到原题. 利用 $\sum\limits_{p \le M} \mathrm{Var}(X_p) = \ln\ln n + O(1)$ 及**引理 0.2** 可知,

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{p \le M} \mathrm{Var}(X_p) + \sum_{p \ne q \le M} \mathrm{Cov}(X_p, X_q) = \ln\ln n + O(1).$$

引理 0.3 (Chebyshev 不等式).

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \ge a\right) \le \frac{1}{a^2} \mathrm{Var}(X)$$

引理的证明: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \ge \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2 1_{\{|X - \mathbb{E}[X]| \ge a\}}\right] \ge a^2 \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \ge a\right)$.

回到原题. 由**引理 0.3** 知, 对任意 $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \ln\ln n| > \lambda\sqrt{\ln\ln n}) \le \frac{1}{\lambda^2} + o(1).$$

再由**引理 0.1** 知,

$$\mathbb{P}(x \in \Omega_n : |v(x) - \ln\ln n| > w(n)\sqrt{\ln\ln n}) \le \frac{2}{w(n)^2} + o(1) \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

故定理得证. □

参考资料

[1] 邹广翼: 解析数论入门的入门, 2023.(参见课程群文件中的 “阅读材料: 素数倒数和.pdf”)

[2] Noga Alon, Joel H. Spencer: The Probabilistic Method, 4th Edition, 2016, ch4 45-48.